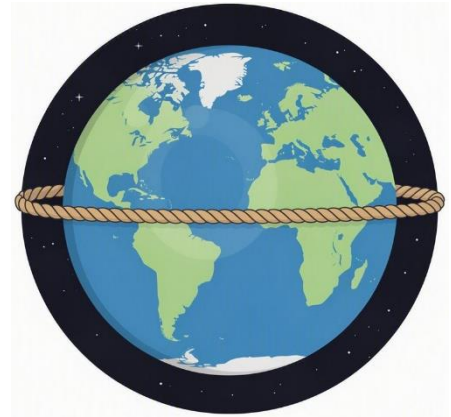


Rechnungen am Äquator - unfassbar!

In der Mathematik treten immer wieder Situationen auf, wo kleine Änderungen überraschend große Auswirkungen haben.

Eine bekannte Aufgabe in diesem Zusammenhang ist folgende:

*Man legt ein Seil um den Äquator (Berge, Täler und Meere werden ignoriert). Anschließend verlängert man das Seil um 1m und hebt es gleichmäßig um den gesamten Äquator an.
Wird eine Maus unter dem Seil hindurchpassen?*



Lösung: Der Erdradius beträgt $r = 6371\text{km}$

Für den Erdumfang am Äquator gilt dann:

$$\begin{aligned}u_1 &= 2 \cdot \pi \cdot r \\&= 2 \cdot \pi \cdot 6371\text{km} \\&\approx 40030,17359 \text{ km}\end{aligned}$$

Für das verlängerte Seil gilt dann:

$$\begin{aligned}u_2 &= u_1 + 0,001\text{km} \\&= 40030,17359\text{km} + 0,001\text{km} \\&= 40030,17459\text{km}\end{aligned}$$

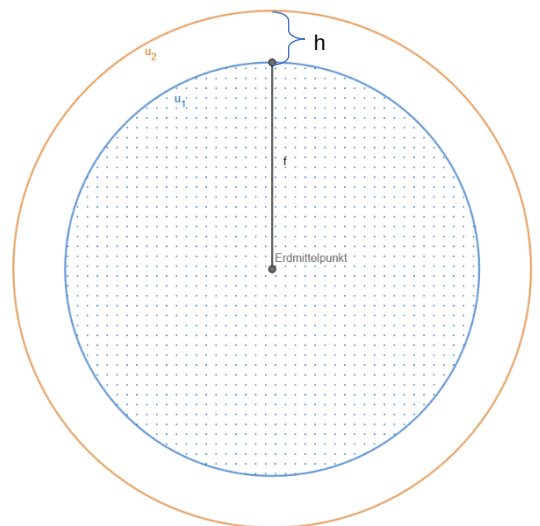
Der Radius des verlängerten Seils ist $r + h$.

Somit kann man für die Seillänge auch schreiben:

$$u_2 = 2 \cdot \pi \cdot (r + h)$$

Nach h aufgelöst erhält man:

$$\begin{aligned}h &= \frac{u_2}{2 \cdot \pi} - r \\&= \frac{40030,17359\text{km}}{2 \cdot \pi} - 6371\text{km} \\&= 0,00016\text{km} \\&= 16\text{cm}\end{aligned}$$



Das Seil kann bei einer Verlängerung um 1m gleichmäßig um den Äquator um erstaunliche 16cm angehoben werden. Da passt eine Maus locker drunter durch.

Das Ergebnis ist durchaus beachtlich – es geht aber noch „krasser“!

Das um 1m verlängerte Seil wird nun nicht gleichmäßig angehoben, sondern an einem Punkt gepackt und nach oben gezogen.
Wie weit lässt sich das Seil in die Höhe ziehen?

Ein Teil des Seils liegt nun wie zwei Tangenten an die Erde (s. Bild). In den Punkten S und T treffen die Tangenten auf die Erdoberfläche. Damit ist aber z.B. das Dreieck MTP rechtwinklig!

Die beiden Tangentenstücke haben somit jeweils die Länge

$$w = r \cdot \tan(\alpha)$$

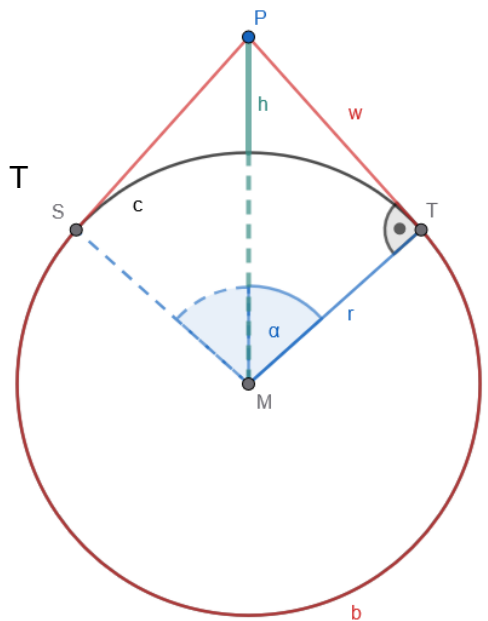
Für den langen Kreisbogen b gilt:

b = gesamter Umfang – kleiner Bogen von S nach T

$$b = u_1 - 2\pi r \cdot \frac{2\alpha}{360^\circ}$$

Und im Bogenmaß:

$$\begin{aligned} b &= u_1 - 2\pi r \cdot \frac{2x}{2\pi} \\ &= u_1 - u_1 \cdot \frac{2x}{2\pi} \\ &= u_1 \frac{2\pi}{2\pi} - u_1 \cdot \frac{2x}{2\pi} \\ &= u_1 \cdot \frac{2\pi - 2x}{2\pi} \end{aligned}$$



Die komplette Seillänge setzt sich nun zusammen aus dem langen Kreisbogen b und den beiden Tangentenstücken w:

$$40030,17459\text{km} = u_1 \cdot \frac{2\pi - 2x}{2\pi} + 2 \cdot r \cdot \tan(\alpha)$$

Setzt man die Werte für Erdumfang u_1 und Erdradius r ein, erhält man eine Gleichung, die man nur mit dem Computer lösen kann.

Man erhält für den Winkel α am Erdmittelpunkt das Bogenmaß $x \approx 0,00618$

$$\text{Es gilt nun: } \cos(x) = \frac{r}{r+h}$$

$$\Rightarrow h = \frac{r}{\cos(x)} - r = \frac{6371}{\cos(0,00618)} - 6371 \approx 0,12166\text{km}$$

Das Seil lässt sich an einem Punkt unglaubliche 121m in die Höhe ziehen, obwohl es nur um 1 Meter verlängert wurde!

Der Grund liegt darin, dass der Erdumfang sehr groß ist, die Erdoberfläche damit relativ flach und somit die Tangentenpunkte S und T weit auseinander liegen. Gibt man dem Seil nun ein wenig mehr Länge, gewinnen die entstehenden Tangenten schnell an Höhe.